Corrigé du Sujet du Concours Général de Physique "Minko Balkanski" 1998

Problème I

1. Notons $[A]$ l'homogeneité de la grandeur A. Alors:$[E] = \frac{[G][M][m]}{[r]} = \frac{[G]kg^2}{m} = J = kgm^2s^{-2}$ d'où : $[G] = kg^{-1}m^3s^{-2}$.

2. La concervation de l'énergie s'écrit : $-\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} = cste$; écrivons là en $r = R$ et $r = \infty$: $cste = -\frac{GMm}{r} + \frac{mV^2}{2} = 0 + \frac{mV_\infty^2}{2}$. Il faut alors $cste \geq 0$, d'où $V \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_l$.

3. On a:$\frac{[G][M]}{[R]} = \frac{kg^{-1}m^3s^{-2}kg}{m} = \frac{m^2}{s^2}$.

4. Avec $v_l = c$ on obtient immédiatement : $R_c = \frac{2GM}{c^2}$.

5. On a : $c = \sqrt{\frac{2GM}{R_c}}$,$v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, d'où $\frac{v_l}{c} = \sqrt{\frac{R_c}{R}}$ soit $R_c = R(\frac{v_l}{c})^2$. A.N.: $R_c = 7.1mm$!

6. Avec $\rho_{Terre} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ et $\rho_{Astre} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi {R_c}^3}$ on obtient: $\rho_{Astre} = \rho_{Terre}\frac{(}{R}R_c)^3$. A.N.: $\rho_{Astre} = 4.0 \times 10^{30}kgm^{-3} >> \rho_{Terre}$! D'après la relativité restreinte la vitesse d'un objet physique ne peut pas depasser la vitesse de la lumière dans le vide c. Si $v_l = c$ plus aucun corp ne peut s'echapper de l'astre, même la lumière; d'où l'appelation "Trou noir".

7. On a : $R_c \sim M$ et $\rho \sim \frac{M}{{R_c}^3} \sim \frac{1}{M^2}$, donc ρ diminue quand M augmente.

Problème II

1.a. Les forces appliquées sur la charge mobile sont :

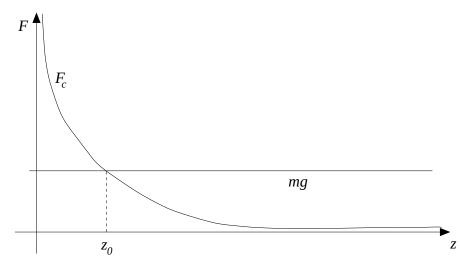
-le poids $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e}_z$

-la force de répulsion électrostatique $\overrightarrow{F}_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 {z_0}^2}\overrightarrow{e}_z$

à l'équilibre : $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_c = \overrightarrow{0}$ d'où : $mg = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 {z_0}^2}$, soit : $z_0 = q\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 mg}}$.

1.b. L'équilibre est stable si après un petit écart de la position d'équilibre les forces ont tendence de ramener le corp dans celle-ci. Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

La projection algébrique de la force s'éxercant sur la sphére est : $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z^2} - mg$. Tracon la en fonction de z :



On voit que pour : $z > z_0$ $F < 0$

$z < z_0$ $F > 0$

La force ramène la shère en z_0 ,donc l'équilibre est stable.

1.c. A.N.: $z = 3cm$ (Ne pas oublier à convertir tout les unités en unités S.I.!).

2.a. Energie potentielle du pesanteur : mgz

Energie potentielle électrostatique : $+\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z}$

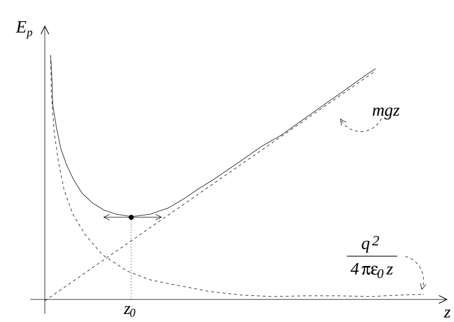
d'où à une constante additive près : $E_p(z) = mgz + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z}$.

2.b. L'équilibre correspond à un extremum de $E_p(z)$. L'équilibre est stable si c'est un minimum et istable si l'extremum est maximum.

2.c. On a : $\frac{dE_p}{dz} = mg - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z^2} = 0$ pour $z = z_0$; d'où le resultat de 1.a.

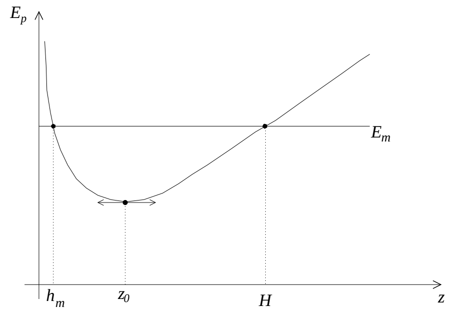
Or $\frac{d^2E_p}{dz^2}|_{z=z_0} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 {z_0}^3} > 0$: équilibre stable.

2.d. On obtient :



3.a. Il n'y a pas de frottement, donc l'énergie mécanique $E_m = E_p + \frac{mv^2}{2}$ se conserve. En $z = H$ $v = 0$

donc on a $E_m = mgH + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 H^2}$. On obtient la figure :



3.b. La bille oscille sur l'axe Oz entre les deux points extrèmes H et h_m où la vitesse s'annule et change de signe pour devenir maximal en module en $z = z_0$.

3.c. On doit avoir $E_p(h_m) = E_m$. d'où :

${mgh_m}^2 - E_m h_m + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 0$

3.d. Voir la figure de 3.a.

3.e. On rémarque que h_m et H sont exactement les deux racines de l'équation carré de 3.c. Avec les formules de Wiet on obtient $Hh_m = {z_0}^2$ d'où : $h_m = \frac{{z_0}^2}{H} = 9mm$.

3.f. La concervation de l'énergie donne : $\frac{mv^2}{2} + E_p(z_0) = E_p(H)$ d'où

$\frac{mv^2}{2} = E_p(H) - E_p(z_0) = 4.10^{-5}J$.

3.g. Pour $z = 2r = 4mm$ on a $v = 0$, avec la formule etablie en 3.e. on obtient $H = \frac{{z_0}^2}{2r} = 0,23m$.

Problème III

1.a. $f\lambda = c$

1.b. D'après 1.a. $\lambda = \lambda'(1 - \frac{v}{c})$. Donc $v = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'}c$.

A.N. $v = 55km/s$. Aldébaran s'éloigne de la Terre à cette vitesse.

1.c. $\frac{\lambda'_\alpha}{\lambda_\alpha} = \frac{\lambda'_\delta}{\lambda_\delta}$ d'où $\lambda'_\delta = \frac{\lambda'_\alpha}{\lambda_\alpha}\lambda_\delta$.

A.N. $\lambda'_\delta = 410,25nm$

2.a. Dans le référentiel tournant où la planète et le satellite sont immobiles, sur le satellite s'exercent deux forces :

-force de gravitation $\frac{GMm}{d^2}$ dirigée vers l'astre.

-force centrifuge $m\frac{v^2}{d}$ dirigée dans le sens opposé.

L'équilibre donne $\frac{GMm}{d^2} = m\frac{v^2}{d}$, d'où $v = \sqrt{\frac{GM}{d}}$. Or $2\pi d = vT$, donc $T = \sqrt{\frac{4\pi d^3}{GM}}$.

2.b. La distance d' de A_v à C_G est donnée par $d' = \frac{M_c}{M_c + M_v}d$, par définition de C_G. Or $V_v T = 2\pi d'$ avec $T = 2\pi d'\sqrt{\frac{d}{G(M_c+M_v)}}$, donc $V_v = \frac{M_c}{M_c+M_v}\sqrt{\frac{G(M_c+M_v)}{d}}$.

2.c. D'après le 2.b on a

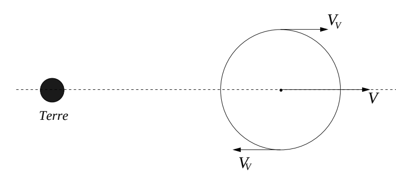
$$\frac{V_v T}{2\pi M_c}(M_c + M_v) = d = \frac{GM_c^2}{(M_c + M_v)V_v^2}$$

et donc $\frac{M_c^3}{(M_c+M_v)^2} = \frac{V_v^3 T}{2\pi G}$.

3.a. On a $1 - \frac{v}{c} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ d'où $v = c(1 - \frac{\lambda}{\lambda'})$. On rémarque que v croît si λ' croît, d'où :

$v_{max} = c(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_{max}}) = 342,5kms^{-1}$

$v_{min} = c(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_{min}}) = 141,6kms^{-1}$. 3.b. Voir la figure suivante :



La composition des vitesses donne : $V_{min} = V - V_v$ et $V_{max} = V + V_v$.

3.c. On en deduit :

$V = \frac{1}{2}(V_{min} + V_{max}) = 242,0kms^{-1}$

$V_v = \frac{1}{2}(V_{max} - V_{min}) = 100,5kms^{-1}$.

3.d. La période de revolution, comme on le voit sur le dessin, est justément la période temporelle du phénomène Doppler d'où $T = 7,9 - 2,3 = 5,6jours$.

3.e. En reportant les valeurs de T,V_v et G dans l'expression de III2.b. on trouve $\frac{M_c^3}{(M_v+M_c)^2} = 0.58M_\odot$ (avec $1M_\odot = 2.10^{30}kg$). Or $M_V = 3.10^{31} = 15M_\odot$, supposons $M_V >> M_c$, alors $\frac{M_c^3}{M_V^2} = 0.58M_\odot$, donc $M_c = (0,58.15^2)^{\frac{1}{3}} = 5,1M_\odot << 15M_\odot$ et alors $M_c = 1,0.10^{31}kg$. Une méthode d'approximations successives donnerait $M_c = 1,3.10^{31}kg$.